第５章

ピタゴラスも泣いている

相対論とピタゴラスの定理は切っても切れない関係です。解説書でよく見かける関係式の導出アプローチは、直角３角形の**作図**から始まります。この定理がなければ、座標変換の手がかりがなくなり、相対論は成立しません。

しかし、よく考えるとこの定理は**直行座標でのみ**使えるはずです。座標系自体が歪んでいる相対論で採用されたのはなぜでしょうか？

このカラクリを解くとことで、変換式のトリックがはっきりと見えてきます。

変形されたピタゴラスの定理

ピタゴラスの定理は直角３角形の３辺の長さについて、公式にしたものです。あえて説明の必要もないと思いますが、念のため触れておきます。

直角３角形の斜辺の長さをＺ、残りの２辺の長さをそれぞれＸ、Ｙとした時、$Z^2 = X^2 + Y^2$ が成立します。

相対論の式のうち、作図で求めた関係式はどんなに複雑に見えても、結局は直角３角形の辺の**比率が基準**になっています。理論に登場する時間の変換式などを理解するには、この定理を変形した形を知っておくことで随分と印象が変わるかも知れません。

ピタゴラスの定理を書き換え、斜辺Ｚと辺Ｙの比を求めると、

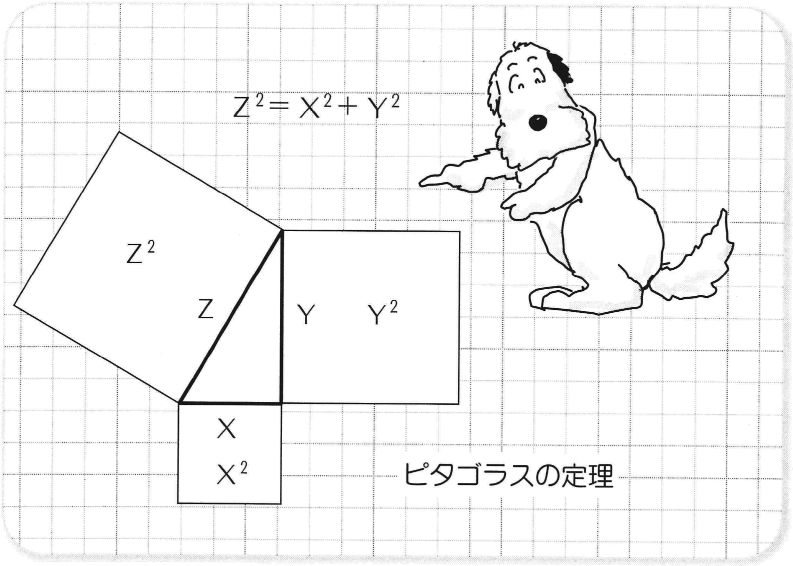
$$Y = \sqrt{Z^2 - X^2}$$

$$\frac{Y}{Z} = \sqrt{1 - \frac{X^2}{Z^2}} \qquad \cdots\cdots\cdots 5-1\text{式}$$

ちなみに、辺Ｙから斜辺Ｚ変換の変換はこの逆数となります。

$$\frac{Z}{Y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{X^2}{Z^2}}} \qquad \cdots\cdots\cdots 5-2\text{式}$$

斜辺Ｚと辺Ｙの関係を表している式です。一見ピタゴラスの定理ではないように見えますがまったく同じものです。これらは相対論の基本式を形作ります。



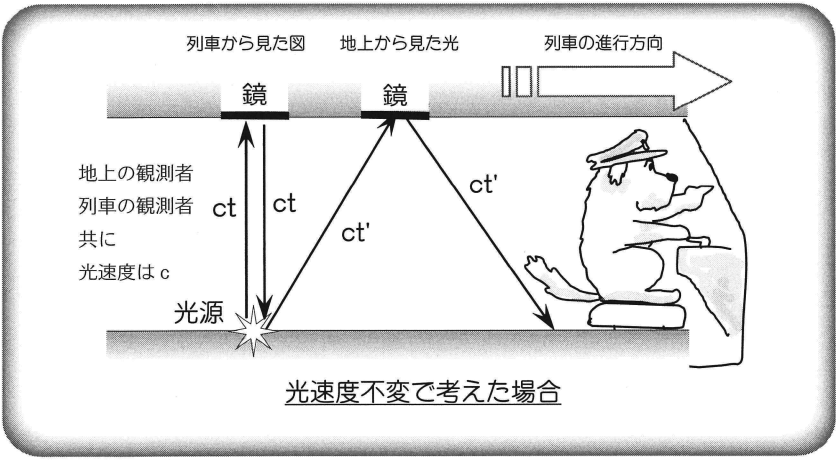
ピタゴラスの定理

相対論の式を導出

「時間とは相対的であり、定常系と運動系では時間の進み具合が違う。」

　このように断言されてしまうと、いったいどうやってお互いの時間を知ればいいのか迷ってしまうでしょう。

　アインシュタインは、この時間の変換式も仮想実験で導出しています。論文でのアプローチは少し特殊ですから、一般の解説書でよく見かけるアプローチを検証しましょう。



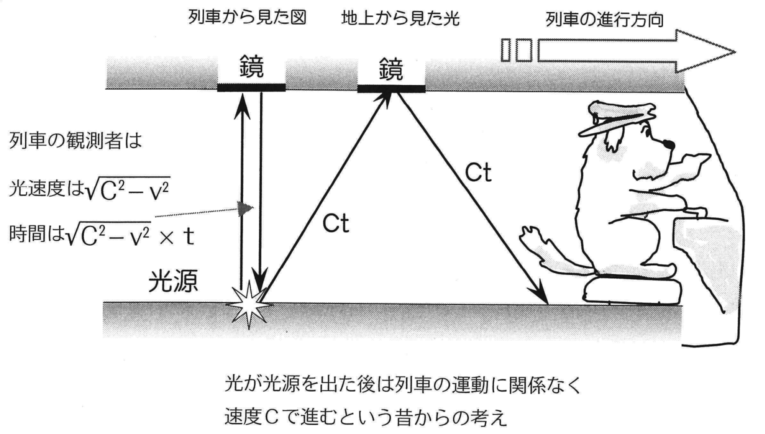
光速度不変で考えた場合

　運動している列車の中で、床から垂直に光を発射します。天井に向けて発射された光は鏡によって反射され、元の位置へ戻るとします。列車内の観測者は速度ｃで床と天井を往復する光を観測するはずです。

　一方、この様子を定常系の観測者から見ると、走行中の列車の床から進行方向に対して斜めに発射された光は、少し進んだ列車の天井で反射され、また少し進んだ列車の床に戻ると予想されます。

この仮想実験に光速度不変の原理を当てはめると、定常系の観測者は光の速度をｃ、運動系の観測者も光速度をｃと観測します。古典物理学では完全に矛盾した要請ですが、光速度不変の原理を導入するためには避けて通れない設定のようです。

そこで以上の条件を考慮しながら作図によって、相対論の関係式を導出して矛盾を解決しようというわけです。



古典物理学で考えた場合

古典物理学も相対論もこの時の図はまったく同じです。どちらも距離は速度と時間の積だという点は共通です。ただ大きな違いはそれぞれの距離を構成している速度を固定しているか、それとも時間を固定しているかという点です。

古典物理学では光速度Ｃは不変ではないので、時間ｔは共通になります。一方、相対論では、光速度ｃが一定なので時間の方が変化します。

定常系と運動系での距離の比はそのまま、直角３角形の斜辺Ｚと辺Ｙの**長さの比**になります。

それぞれを、

$$ct' \qquad ct$$

で表現すると、光速度不変の原理を採用した相対論の式になります。

光速度 c があらゆる座標系で共通である相対論では、線分の長さが基本時間の違いと判断されます。つまり、t'、t の比は直角３角形の線分Ｚ、Ｙの比と等しくなります。

実際の式は、ピタゴラスの定理を変形した５－２式に、ct'、ct を取り入れ、

$$\frac{t'}{t} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \qquad \cdots\cdots\cdots 5-3\text{式}$$

です。

注意しなければならないのは、この時間の違いは１秒と２秒といった経過時間を表しているのではなく、同じ１秒間に対してその進み方の違いを表していることです。

古典物理学ではどの座標系でも同じ時間の概念を使えたのですが、相対論の時間は座標系ごとにその基本単位が異なります。定常系での１秒は運動系では１秒ではなくなります。

そこで

「定常系での時間 t' に対して運動系では時間 t に相当する」

として、その変換式を求めるためにピタゴラスの定理を使ったのは、しかたのない展開だったのかも知れません。

錯視の理論がなぜ運動方程式に？

「光速度不変を原理として、光がどのように見えるかを考察するだけで、当然ながら時空の収縮理論が構築される」

「光がどのように見えるかってことは、目に見える光についての理論ってことだよね。錯覚とか錯視について考えてた仮想実験から、なんで時間が縮んだり空間が歪んだりっていう結果が出せるの？
予想したことがいくら不思議でもそれは錯視を予想しただけだから、へェーそういうふうに見えるんだっていう程度の理論にしかならないよ。
物の見え方で運動方程式が決まるなら、テレビの画面を見て奇妙な理論を作っても、実験するまで検証が不可能ってことになるよね」

変換率＝１

アインシュタインが相対論を発表した論文では、ピタゴラスの定理を使った説明はありませんでした。彼の論文を解説するために、光が通過した経路を**１枚の図**にプロットしてみたところ、ちょうど直角３角形を構成していたので、解説書ではこの定理が利用されるようになったのでしょう。

定常系と運動系の時間の進み方が違うと仮定してしまうと、その変換比率が未知になり、ピタゴラスの定理が使えなくなってしまいます。まったく理にかなっているように思えたアプローチも、古典力学の作図の習慣がなければ成立しません。

古典力学や数学での作図は主に、長さの違いを視覚的に分かりやすくするために使われます。線分の長さをそのまま数式にして評価するため、特にことわりがない場合、**１枚の図の縮尺をみな同じに揃える習慣**があります。

作図の結果、直角３角形であれば、ピタゴラスの定理で辺の長さが求められるでしょう。また、線分と線分がピタリと重なっていれば、イコールで結ぶことも可能です。これは古典力学だからこそ使えた大変便利な習慣でした。

ところが、いかに便利な手法でも、状況が変化した後もそのまま使い続けられるとは限りません。特に、異なる座標系の変換式を導出していない、初期段階の相対論ではなおさらです。

時間や長さを比較する手段が解明されていないので、２つの座標系での出来事を１枚の図に**同じ縮尺**でプロットすることは不可能です。定常系で１㎝の線分が、運動系でも１㎝だということは絶対に有り得ません。基本となっている時間や長さの単位が共通して使えないからです。

もし、それぞれの座標系の線分を1枚の紙に書き落とせ、しかも、ピタゴラスの定理が使えるのなら、変換比率は1で、未知であることにはなりません。

この事実は、作図時に限らず、作図から変換式を求めた後でも有効です。

相対論の解説でよく使われる図形が直角3角形であり、ピタゴラスの定理で関係式を求めているなら、

「定常系と運動系の変換関数は1である」

と認めたことになります。

しかし、相対論で変換関数が1になるのは、運動系の速度vが0の場合だけしか認められていません。変換関数を求めるプロセスで、このような矛盾が生じるのは、導入部分で重大な見落としがあった証拠です。

作図をしたのは誰だ

どの参考書を見ても、どの解説書を見ても皆同じような直角３角形が描かれています。

「本当にすべての著者がまったく同じ間違いをするのか」

不思議に思われるかもしれません。

相対論の作図問題は、直角３角形が現れたところで、すぐにピタゴラスの定理を応用しているので要注意です。ピタゴラスの定理は誰でも知っている定理で、直角３角形が目の前に提示され、

「ピタゴラスの定理を使って」

と言われると、すぐに計算して確かめてみたくなります。

アインシュタインのトリックには、このような**心理的トリック**が多く隠されています。ピタゴラスの定理であっという間に問題を解決しているように思わせておいて、実は図形が直角３角形であることを暗に認めさせています。

相対論の図形にピタゴラスの定理が使える図形かどうか、検証する機会は与えられていません。

「では、あの図形は何だ」

と問われるでしょう。それは、

「各自が直角３角形になるように座標系の縮尺を**勝手に調整**した図」です。

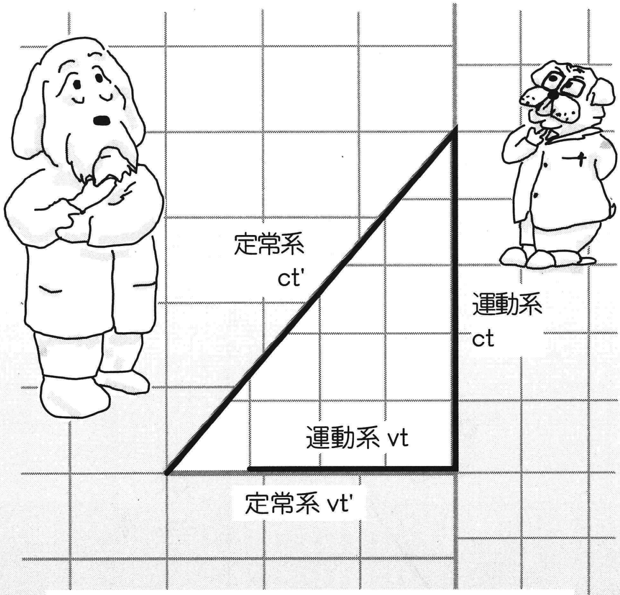
古典力学では直角３角形になるのですが、相対論でもそうなると、誰か証明したのでしょうか？

思い込みで作図をしてはいませんか？

直角３角形を構成している３辺は、全く違った縮尺の定常系と運動系の線分を単純に組み合わせただけのものです。見かけ上は直角３角形に見えますが、実際はどのような図形になるかはまったく未知です。

出来上がった図にピタゴラスの定理を使うことはおろか、関係式を導くという数学的作業は一切行えない図です。

相対論で使われている直角３角形の１例



きれいな直角３角形に見えていても、グリットを書き込むと縮尺の違いがよくわかる。もちろん、ピタゴラスの定理は使えない。これは古典物理学の習慣をそのまま相対論の仮想実験に持ち込んだのが原因。

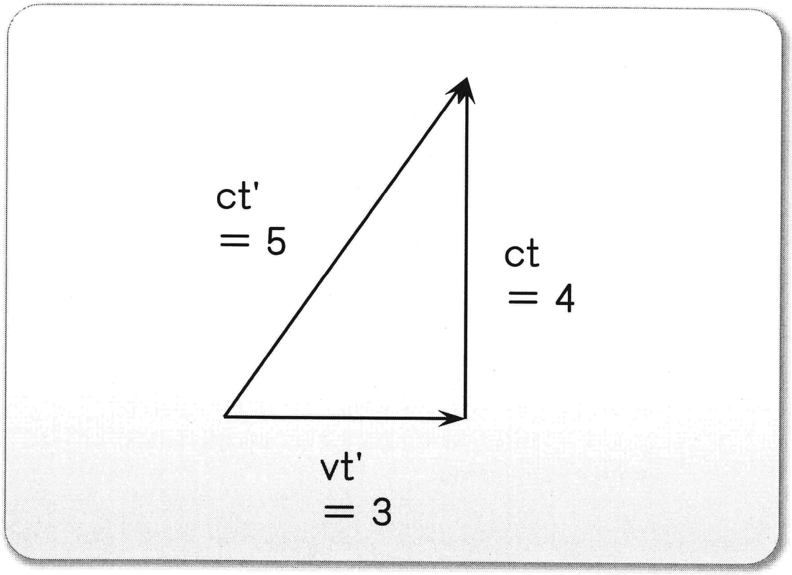
借りてきた同時性

以上のことを意識して、実際に作図を検証してみましょう。
まず、定常系、運動系で光が進んだ距離をそれぞれ ct'、ct とし、運動系の動きを vt' とします。分かりやすいよう

ct' ＝ 5、vt' ＝ 3、ct ＝ 4

の比率に統一しておきます。

これはちょうど直角 3 角形になるに設定してあるので、当然ながらきれいな直角 3 角形が出来上がります。こうして相対論で見かける 3 角形と同じものを描いておきます。



この図を見る限りでは特に不自然さは感じられません。ただし、定常系のデータが省略されていて、まだ検証できる状態でないようです。

そこでこの図に足らない、

vt も記入

してみます。

速度 vt は速度 vt' を定常系から記述したものです。お互いの座標系の相対速度を記述しているので、相対性原理によって両者はまったく同じ長さの線分になります。ただ、ベクトルが逆になっているだけです。（相対論での相対性原理の解釈を厳密に採用すると、ベクトルという概念も否定されるのですが無視します。）

vt が vt' と同じ長さなら、v で割ると、

$$t = t'$$

が成立します。相対性原理を尊重すれば、定常系と運動系の時間は同じということです。光が発射され鏡に届くまでの時間は定常系、運動系に差は見られません。つまり、光は同時刻に到着したことになります。

しかし、相対論に詳しい人なら、


「相対論では同時性の概念は否定されているのだ」

と言いたいところでしょう。

では、同時性の概念を復活させているのは誰でしょうか？　それは、

相対論にピタゴラスの定理を応用している人達全員

です。

光が発射された瞬間に、両座標系の原点が重なっていたと判断していることに問題は無いようでが、到着した時刻はどうでしょうか。もちろん、古典物理学の同時性の概念を使えば同時です。

相対論で同時かどうか分からないから、それぞれの時刻を t、t' と定義したはずです。

にもかかわらず、

なぜ、作図では終点を一致させているのでしょうか？

時間の進み具合が分かっていない段階で、定常系で光が頂点に到着した**瞬間**に運動系の光がどこにあるかをどのように決定すればよいのでしょうか。まだ、到着していないかもしれませんし、通り過ぎているのかもしれません。

古典物理学の**同時性の概念を借りて**こなければ、何も分からないはずです。光が鏡に到着した瞬間を定常系、運動系で同時とみなしているからこそ完成図はきれいな直角 3 角形を形成しています。

仮に、このまま t、t' の関係式の導出に成功したとしても、時刻 t に対応しているのが時刻 t' だとは限りません。たまたま古典物理学的作図上で一致している 2 点を対応させただけです。

まったく無関係な点どうしを関連付けて、定常系から運動系変換の変換式を導出したとは言わないでしょう。

定常系の 1 点が、運動系のどの点に対応するかが 最大の関心事

であり、相対論が独自に解明しなければならないテーマです。同時性の概念を借りてきて、安易に作式へと進むわけにはゆかないでしょう。


誰が作図をしろと
言った？
あなたが創った
理論じゃないですか

リセットされた作図

長さの違う線分を ct、ct' とおいて、

「c が共通なら時間が異なるだろう」

というのは当然の判断です。さらに時間まで共通ならどうでしょうか。作図が間違っていると判断してもいいはずです。

相対論の謎を解明するには、作図での思い込みや無意識の操作を見つけ出さなければなりません。その鍵となるのが相対性原理です。相対論での相対性原理の扱いは絶対的存在です。

ところが、仮想実験を作図する時は、

相対性原理を取り込むのを忘れて

います。

相対論で様々な座標系上に固有の速度 v がそれぞれあったとします。v に入る数値は同じでも、座標系の違いからみな等価では有り得ません。

しかし、光速度 c と速度 v の比率はどの座標系でも共通で、座標系ごとに変化することは許されません。

それが相対性原理の要請だからです。

図上では定常系が ct'：vt'、運動系では ct：vt が、光速度と相手の運動速度の比になります。

底辺の vt が vt' と同じであることを考えると、

$$ct : vt = 4 : 3$$
$$ct' : vt' = 5 : 3$$

t を消去して

$$c : v = 4 : 3 \quad \cdots\cdots\cdots 定常系での比$$
$$c : v = 5 : 3 \quad \cdots\cdots\cdots 運動系での比$$

したがって、

$$4c = 5c \qquad c = 0$$

$c \neq 0$ なら、

$$\mathbf{c \neq c}$$

となり、作図にもリセットがかかっていることが分かります。

相対性原理を取り入れて、その上、作図も正しいとすれば光速度が 0 の場合にのみ仮想実験が成立します。光速度が 0 とは光が発せられていない状態です。

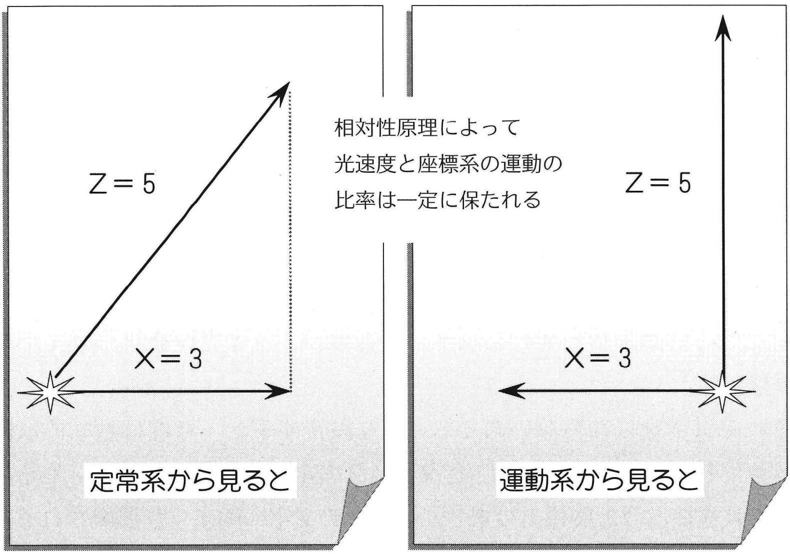
それでは実験にならないので $c \neq 0$ を設定すると、今度は数学的展開がリセットされます。この先、ピタゴラスの定理を応用しようと、さらに高度な技を使おうと関係ありません。ただの文字の固まりが展開されるだけです。

以上は相対論の観点と同じように、図が直角 3 角形だと判断した場合の結果です。はじめから、直角 3 角形でないと分かっていれば、このような議論も必要なくなります。

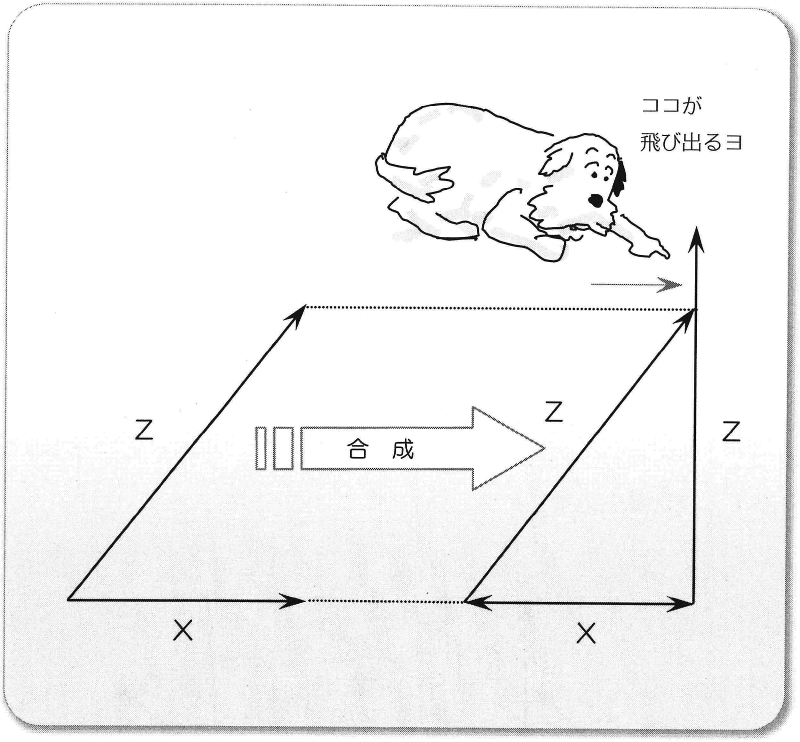
合成された図

ためしに、相対性原理と光速度不変の原理を取り入れながら、仮想実験を作図し直してみましょう。定常系と運動系の変換式が判明していないので、それぞれを別の図として扱います。

光速度ｃと速度ｖの比をそれぞれ５：３に固定します。定常系では運動系の進行方向に対して斜めに、運動系では直角に光は進みます。（ただし、これも古典物理学的考えです）



定常系では光の先端は常に光源の真上にあり、運動系が移動した距離と同じだけ進行方向に進みます。両系共に観測者から見た光の速度は同じです。



底辺Xを手がかりにこれらの図を合成すると、頂点の飛び出た3角形が出来上がります。この図にピタゴラスの定理は使えません。

定常系と運動系の変換関数が分からない状態で作図しても、手がかりが突然現れるということは有り得ません。常識的な数学では、作図自体が不可能と判断して、関数についての情報待ちになります。

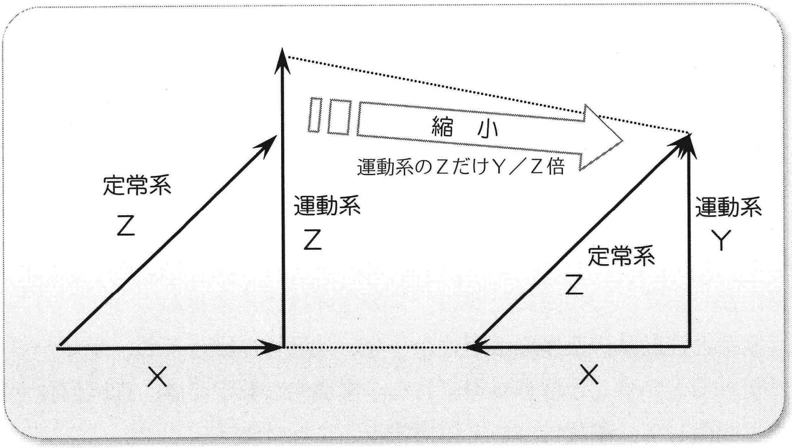
あるいは、相対性原理と光速度不変の原理の両立が疑問視され、議論は相対論の振り出しに戻されるでしょう。

しかし、現実にはこの後の何気ない作業によって、現代物理学を崩壊させているほど強力なトリックとなり、宇宙の果てにまで議論が広がります。その作業は相対論の数学的な性質をほぼ100%決定していると言えます。その作業を見るために、あえてこの先を進めましょう。

宇宙の起源

2つの図を単純に重ねただけでは頂点が一致しません。どちらのYも長さが同じなので、斜めに走った分だけ定常系の線分が短くなります。運動系の線分は3角形の頂点から飛び出た形になります。

このままではピタゴラスの定理が使えないので、同時性の概念を借用して頂点で2本の線分の終端が一致したことにします。そのためには運動系の方のYだけを縮小します。



この時の縮小率は、斜辺Zを辺Yに揃えたので、

$$\frac{Y}{Z}=\frac{\sqrt{Z^2-X^2}}{Z}$$

$$=\sqrt{1-\frac{X^2}{Z^2}} \qquad \cdots\cdots 5-4式$$

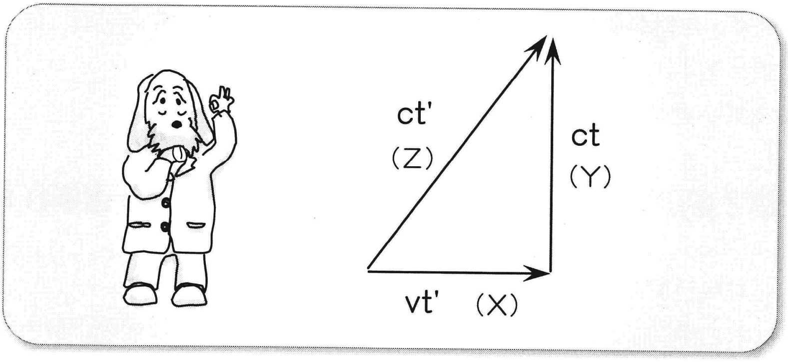
になります。

式だけを見るとピンと来ませんが、図上では辺Ｚを辺Ｙの長さに揃えるだけなので、特に意識することも無く、

誰もがこの時の操作を暗算で行っています

こうすることでとりあえず頂点が一致し、直角３角形が出来上がります。

ここまで連の操作を一度に終了させるにはあらかじめ直角３角形を描いておき、それぞれの辺を ct'、vt'、ct と定義するだけで OK です。よく知られた相対論のアプローチと同じです。



相対性原理を考慮すると、vt = vt'、t = t'、ct = ct' は必然的に成立するのですが、底辺の vt が省略されているため気づきません。

ct と ct' の線分の長さが違うことから、「時間の基本単位が違うのだろう」ということで相対論が受け入れられ、ビッグバンやブラックホール、ダークマター、ニュートリノなどが発生します。

ということは、この３角形の作図によって私たちの宇宙が誕生していると言えます。相対論的宇宙論によると、宇宙の起源は今から約 100 年前となります。

修正作業＝相対論

冷静に考えるとtとt'の違いは、長さの違う線分にctとct'を定義したのが原因です。これらの値は光速度不変の原理の影響を受けているものなので、本来なら式に残すか、あるいは関数として扱うべきものです。

図に直接、結果だけを書き込むという行為によって、線分の長さを揃える作業の**足跡が消される**と同時に、文字cは数値でなく変換関数になってしまいます。

つまりctの文字cには、

辺Zを辺Yに縮小拡大した時の、演算がそのまま含まれる

ことになります。

これ以降は、文字cを変換関数として扱わなければ、このアプローチには理論をリセットする以外の道は残されていません。（原理を採用した時点で、関数表示をすれば間違いは避けられたかも知れません。）

運動系のctに、辺Zから辺Yへの変換関数が含まれていることを認識していれば、今まで時間tから時間t'への変換関数と思われていたものは「1倍にする関数」に戻され、省略可能になります。

代わりに同じ変換を文字cが担い、全体のバランスは保たれます。ただし、文字cが関数だという認識がなければ、どこで間違えたのか気づかないまま延々と展開が続けられるでしょう。

ctに対して実行された5―4式は、作図だけに応用され、式には入っていません。そのため、式の整合性を保つ関数が必要となります。それが相対論の関数です。

時間 t から時間 t' への変換係数を τ とすれば、

$$\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

で表されます。c を不変としたため t' だけに作用していますが、本来なら斜辺の c に作用するべきものです。相対論では暗算で処理された 5 — 4 式の分だけ辺Ｙの c に係数が足りないということです。

5 — 4 式はＹ／Ｚのことで、3 角形の辺の比を表しています。今回は t' と t を固定した場合なので単純に、

$$X = v \qquad Z = c$$

から

$$\sqrt{1 - \frac{X^2}{Z^2}}$$

$$= \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

に書き換えられます。

ピタゴラスの定理が使えるように斜辺Ｚを辺Ｙへ縮小した作業は、式に取り入れられなかった代わりに、相対論の重要な係数として理論を支えているということがわかりました。

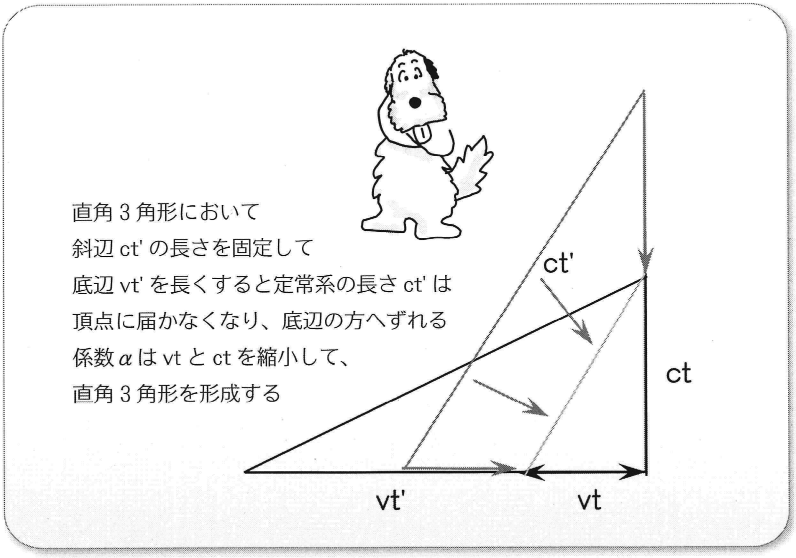
相対論の幾何学的意味

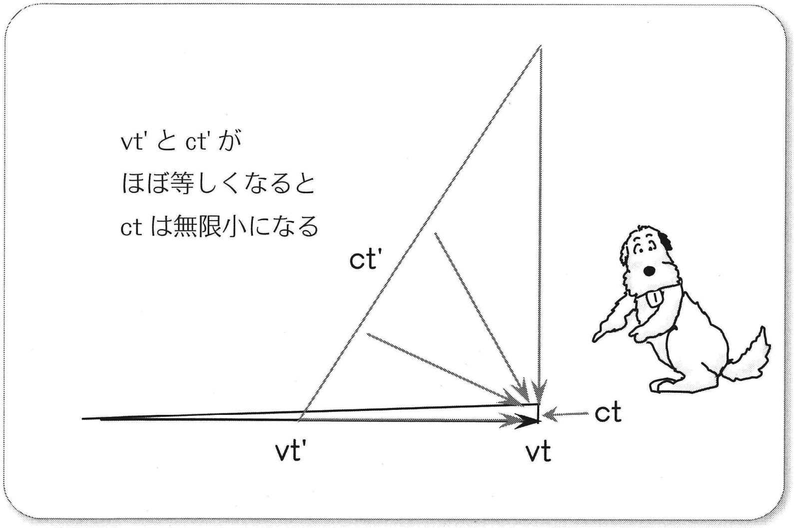
相対論で時間や空間を定常系から運動系へ変換している関数には、必ず共通の係数が基本になっています。それをαとします。

$$\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

αの特徴は、括弧の中の速度vが大きくなるとαの値が加速的に大きくなる点です。相対論では運動系の速度が速ければ速いほど古典物理学の式とはかけ離れるように修正されます。

そのような相対論的効果はすべて、斜辺Ｚの長さを辺Ｙに変換する単なる作図の修正が影響しています。係数αが物理学とは無関係だということを図で確認しておきましょう。





v = 0 で ct' = ct となり、v = c では ct = 0 になります。このように係数 α は相対論と同じ特徴を持ちますが、暗算による修正作業を数式で表しただけです。物理学とは無関係です。

暗算で図を修正した目的は、直角 3 角形を作りピタゴラスの定理で相対論の関数を解明することでした。ところが、その作業は記録されずに数式の中で不必要な関数を定義して補うことになります。

その後は、その関数こそが定常系と運動系をつなぐ関数と勘違いされ、「相対性理論」として発展してゆきます。

それを考慮すると相対論は次のようにも表現できるでしょう。

「相対性理論」とは

未知の関数を求めるための

準備作業が暴走したもの